Számsorozatok

Végtelen számsorozatnak nevezzük az olyan függvényt, melynek értelmezési tartománya a pozitív természetes számok halmaza, érték készlete a valós számok egy részhalmaza.

Számtani sorozat:

Olyan számsorozat melyben az egymást követő tagok különbsége (differenciája) állandó.

$$a_n - a_{n-1} = d \quad (differencia) \quad n \in N^+$$
$$a_n - a_k = a_1 + (n-1)d - a_1 + (k-1)d = (n-k)d$$
$$a_n = a_1 + (n-1)d \quad \text{explicit képlet}$$
$$a_n = a_{n-1} + d \quad \text{rekurzív képlet}$$

Számtani sorozat első *n* tagjának összege:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = a_1 n + \frac{n(n-1)}{2} d$$

Biz:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{n-1} + a_n$$
$$S_n = a_n + a_{(n-1)} + \ldots + a_2 + a_1$$
$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a(n-1)) + \ldots + (a_n + a_1) =$$
$$= n(2a_1 + (n-1)d) = n(a_1 + a_n)$$

Tétel: Egy számtani sorozat bármely tagja a hozzá képest szimmetrikusan elhelyezkedő tagjainak számtani közepe.

$$a_k = \frac{a_{k-p} + a_{k+p}}{2} \quad k; p \in \mathrm{N}^+$$

Tétel: Ha egy számtani sorozat (2k+1) db egymást követő elemeit összeadjuk akkor a középső tag (2k+1) szeresét kapjuk

$$a_{n-k} + \ldots\ldots + a_{n-1} + a_n + a_{n+1} + \ldots\ldots + a_{n+k} = a_n(2\mathrm{k}+1)$$

Biz:

$$a_n - kd + a_n - (k-1)d + \ldots\ldots a_n + \ldots\ldots + a_n + (k-1)d + a_n + kd = a_n(2\mathrm{k}+1)$$

Számtani sorozat: $a_{n-1}; a_n; a_{n+1}$

számtani közép: $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$

Mértani sorozat: $b_{n-1}; b_n; b_{n+1}$ (ha a sorozat pozitív tagokból áll)

mértani közép: $b_n = \sqrt{b_{n-1} b_{n+1}}$

Mértani sorozat:

Egy végtelen számsorozatot mértani sorozatnak nevezünk, ha a sorozat egymást követő tagjainak hányadosa (kvóciense) állandó.

$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n} = q$ *(kvóciens)*

$b_n = b_{n-1}q$ *rekurzív képlet*

$b_n = b_1 q^{n-1}$ *explicit képlet*

Tétel: Ha egy mértani sorozat pozitív tagokból áll, akkor bármely tagja, mértani közepe a tőle szimmetrikusan elhelyezkedő két tagnak.

$b_n = \sqrt{b_{n-k} \cdot b_{n+k}}$ n, k ∈ N^+

A mértani sorozat első n tagjának összege:

$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$ ha $q \neq 1$, illetve $S_n = n \cdot a_1$ ha $q = 1$

Biz.: *I.* $a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + ... + a_1 q^{n-1} = S_n$ $/ \cdot q$

II. $a_1 q + a_1 q^2 + ... + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n = S_n \cdot q$

II.- I. $a_1 q^n - a_1 = S_n q - S_n$

$a_1(q^n - 1) = S_n(q^n - 1)$

$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$ ha $q \neq 1$

$S_n = n \cdot a_1$ ha $q = 1$

A mértani sorozat első n tagjának szorzata:

$$a_1 \cdot (a_1 \cdot q) \cdot (a_1 \cdot q^2) \cdot (a_1 \cdot q^3) \cdot ... \cdot (a_1 \cdot q^{n-1}) = a_1^n \cdot q^{1+2+3+...+n-1} =$$

$$= a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Fibonacci-számok:

Az első két elem 0 és 1, a további elemeket az előző kettő összegeként kapjuk.

$$F_n = \begin{cases} 0, & \text{ha } n = 0; \\ 1, & \text{ha } n = 1; \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{ha } n > 1. \end{cases}$$