# *Vektorok összefoglalása*

Definíció: irányított szakasz (elmozdulás)

Tulajdonságai:
- Hossza
- Állása
- Iránya

Egy vektor nem helyhez kötött, hanem eltolható bárhova önmagával párhuzamosan. Az origóból (vagy tetszőleges vonatkoztatási pontból) induló vektort helyvektornak nevezzük.

Definíció: Két vektor akkor és csak akkor egyenlő, ha az előbb felsorolt három tulajdonsága megegyezik.

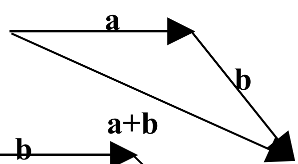
Definíció: **0** vektornak nevezzük azt a vektort, melynek hossza 0.

A **0** vektornak iránya tetszőleges. Bármely más vektorra merőleges, bármely más vektorral párhuzamos.

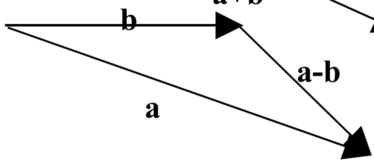
Definíció: Az $\mathbf{a}$ vektor abszolút értékén az $\mathbf{a}$ hosszát értjük. Jelölés: $|\mathbf{a}|$

## Műveletek

Összeadás: A vektorokat egymás után vesszük fel.




Kivonás: A vektorokat azonos kezdőpontból indítjuk.




Számmal való szorzás. A $\lambda\mathbf{a}$ vektor $\mathbf{a}$-val egyállású, $|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda||\mathbf{a}|$, iránya **a**-val megegyező, ha $\lambda > 0$, ellentétes, ha $\lambda < 0$.

Definíció: A $\mathbf{v}$ vektor az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok lineáris kombinációja, ha található olyan $\alpha, \beta \in R$, melyre $\mathbf{v} = \alpha \cdot \mathbf{a} + \beta \cdot \mathbf{b}$.

Tétel: Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem párhuzamos vektorok, akkor az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vektorok síkjának tetszőleges $\mathbf{v}$ vektora egyértelműen felbontható az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokkal párhuzamos összetevőkre. ($\mathbf{v}$ vektor egyértelműen felírható az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok lineáris kombinációjaként)

Tétel: Ha $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ nem egysíkú vektorok, akkor a tér tetszőleges $\mathbf{v}$ vektora egyértelműen felbontható az $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorokkal párhuzamos összetevőkre. ($\mathbf{v}$ vektor egyértelműen felírható az $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok lineáris kombinációjaként.)

Bázisvektorok: $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ páronként egymásra merőlegesek, jobbrendszert alkotnak; $|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1$

Definíció: Az $\mathbf{a}$ vektor koordinátái az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ bázisrendszerben $(a_1; a_2; a_3)$, ha $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$.

Következmény:

- A síkvektorok és a rendezett számpárok között, továbbá a térbeli vektorok és a rendezett számhármasok között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető.
- Origóból induló vektorok koordinátái megegyeznek végpontjuk koordinátáival.

Tétel: $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$, ahol $\mathbf{a}(a_1; a_2; a_3)$.

Definíció: Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok skaláris szorzata $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\gamma$, ahol $\gamma$ a két vektor által bezárt szög.

Tétel: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$, ahol $\mathbf{a}(a_1; a_2; a_3)$ és $\mathbf{b}(b_1; b_2; b_3)$.

Tétel: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}$ merőleges $\mathbf{b}$-re.

Következmények:

- $\mathbf{a}$ irányú egységvektor: $\mathbf{a}_e = \dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$
- vektorok szögének kiszámítása: $\cos\gamma = \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \dfrac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$
- merőleges vektorok felírása síkban: $\mathbf{a}(a_1; a_2)$-re merőleges pl. $\mathbf{a}'(a_2; -a_1)$ vagy $\mathbf{a}''(-a_2; a_1)$
- Koszinusz tétel:
  Ha a háromszög oldalvektorai között a $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ összefüggés áll fenn, akkor a skaláris szorzat alapján $\mathbf{c}^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 - 2\mathbf{ab}$, s ebből az oldalak hosszára $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

Tétel: Ha egy O pontból az A pontba mutat az $\mathbf{a}$, a B-be a $\mathbf{b}$ vektor, és az F pont az AB szakasz felezőpontja, akkor $\mathbf{f} = \overrightarrow{OF} = \dfrac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}$.

Tétel: Ha egy O pontból az A pontba mutat az $\mathbf{a}$, a B-be a $\mathbf{b}$ vektor, és az AB szakaszt a D pont $AD{:}DB = \alpha{:}\beta$ arányban osztja, akkor $\mathbf{d} = \overrightarrow{OD} = \dfrac{\beta\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}}{\alpha + \beta}$.

Tétel: Ha egy O pontból az ABC háromszög csúcsaiba az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok mutatnak, akkor a háromszög S súlypontjába mutató vektor: $\mathbf{s} = \overrightarrow{OS} = \dfrac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3}$

Definíció: Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok vektoriális szorzatán azt a vektort értjük, amely $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokra merőleges, az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokkal jobb rendszert alkot ($\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}\mathrm{x}\mathbf{b}$ sorrendben), hossza $|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin(\mathbf{a}; \mathbf{b})$. Jelölés: $\mathbf{a}\mathrm{x}\mathbf{b}$

Tulajdonságai: nem kommutatív, nem asszociatív, disztributív

Következmény: Az $\mathbf{a}\mathrm{x}\mathbf{b}$ vektoriális szorzat kiszámolható a következő determináns segítségével
$$\mathbf{a}\mathrm{x}\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\mathbf{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\mathbf{k},$$
ahol $\mathbf{a}(a_1; a_2; a_3)$ és $\mathbf{b}(b_1; b_2; b_3)$.

Tétel: Az ABCD paralelogramma területe egyenlő $\left|\overrightarrow{AB} \mathrm{x} \overrightarrow{AD}\right|$-vel.