Hatványozás és négyzetgyök

<u>Definíció:</u> a $\in$ **R**, n $\in$ **Z**

$a^0 = 1$ ha a$\neq$0

$a^1 = a$

$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots a$ (n tényezős szorzat) ha n>1

$a^n = \frac{1}{a^{|n|}}$ ha a$\neq$0, n<0.

A hatványozás azonosságai:

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$a^n : a^m = a^{n-m}$

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ $\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$

<u>Definíció:</u> Az x valós szám normálalakjának nevezzük az $a \cdot 10^b$ kifejezést, ha $x = a \cdot 10^b$, ahol $1 \leq a < 10$ és b egész szám.

<u>Definíció:</u> Az a nem negatív valós szám négyzetgyökén azt a nem negatív számot értjük, amelynek a négyzete a. Jelölés: $\sqrt{a}$ ($\sqrt{a} \geq 0$, $a \geq 0$, $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$)

Következmény: $\sqrt{a^2} = |a|$

A négyzetgyökvonás azonosságai:

$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ ha $a \geq 0, b \geq 0$

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ha $a \geq 0, b > 0$

$\sqrt{a^n} = \left(\sqrt{a}\right)^n$ ha $a \geq 0$

Másodfokú egyenletek

Általános alak: $ax^2 + bx + c = 0$ $a \neq 0$

Megoldóképlet:

$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ x_1, x_2 az egyenlet gyökei

Diszkrimináns: $D = b^2 - 4ac$

Megoldások száma a valós számok körében:

2 megoldás, ha $D > 0$

1 megoldás, ha $D = 0$

0 megoldás, ha $D < 0$

Gyöktényezős alak: $ax^2 + bx + c = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)$

Gyökök és együtthatók összefüggése: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ (*Viéte formulák*)

Másodfokú kifejezés grafikonja parabola.

Minimuma van, ha $a > 0$; maximuma van, ha $a < 0$.

Szélsőértékhelye: $\frac{-b}{2a}$-nál található.

Geometria

Tétel: (*Párhuzamos szelők tétele*) Ha egy szög szárait párhuzamos egyenesekkel metsszük, akkor az egyik száron keletkező szakaszok aránya megegyezik a másik száron keletkező megfelelő szakaszok arányával..

Tétel: (*Párhuzamos szelők tételének megfordítása*) Ha két egyenes egy szög száraiból olyan szakaszokat vág le, amelyeknek aránya mindkét száron egyenlő, akkor a két egyenes párhuzamos.

Tétel: (*Párhuzamos szelőszakaszok tétele*) Egy szög szárait metsző párhuzamosokból a szárak által kimetszett szakaszok aránya megegyezik a párhuzamosok által az egyik szárból kimetszett szakaszok arányával.

Következmények:

- Az λ arányú hasonlósági transzformáció bármely AB szakasz hosszát $|\lambda| \cdot AB$ hosszúságúra változtatja.
- Két háromszög hasonló, ha megfelelő oldalaik hosszának aránya egyenlő.
- A *háromszög középvonala* párhuzamos és fele akkora, mint a harmadik oldal.
- A *háromszög súlypontja* harmadolja a súlyvonalakat.

Háromszögek:

Tétel: (*Háromszög-egyenlőtlenség*) Egy háromszögben bármely két oldal összege nagyobb a harmadik oldalnál. $a+b>c$; $a+c>b$ és $b+c>a$

Tétel: Egy háromszög bármely külső szöge megegyezik a nem mellette fekvő két belső szög összegével. $\gamma'=\beta+\alpha$

Tétel: Háromszög belső szögeinek összege 180°. $\alpha+\beta+\gamma=180°$

Tétel: Háromszög külső szögeinek összege 360°. $\alpha'+\beta'+\gamma'=360°$

Háromszögek osztályozása:

- hegyes szögű (minden szöge hegyes szög)
- tompa szögű (van egy tompa szöge)
- derékszögű

Háromszög nevezetes vonalai	**Metszéspontjuk**
magasságvonal	magasságpont
szögfelező	beírható kör középpontja
oldalfelező merőlegesek	köré írható kör középpontja
súlyvonal	súlypont
középvonal	-

Terület kiszámítása:

$$T = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2} \qquad T_{Héron} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad \left(s = \frac{K}{2}\right)$$

$T = r \cdot s$, $\quad T = \dfrac{abc}{4R}$ ahol *r* a beírt, *R* a köré írt kör sugara

$$T = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2} \qquad \left(T_{derékszögűháromszög} = \frac{a \cdot b}{2}\right)$$

Derékszögű háromszögekre vonatkozó tételek:

Tétel: (*Thalesz tétel*) A síkon azon pontoknak a halmaza, amelyekből egy adott AB szakasz derékszög alatt látszik, az AB átmérőjű kör, kivéve az AB szakasz két végpontját. Ezt a kört az AB szakasz Thalész-körének nevezzük.

Következmények:

- Egy derékszögű háromszög szögei akkor és csak akkor 30°, 60° és 90°-osak, ha az átfogó kétszer olyan hosszú, mint a rövidebbik (30°-kal szembeni) befogó.
- Egy körhöz külső pontból érintőt a Thalész-kör segítségével szerkeszthetünk.

Tétel: (*Pitagorasz tétel*) Derékszögű háromszög befogói négyzetének összege megegyezik az átfogó négyzetével.

Tétel: (*Pitagorasz tétel megfordítása*) Ha egy háromszögben a két rövidebb oldal négyzetének összege megegyezik a harmadik oldal négyzetével, akkor a háromszög derékszögű.

Következmények:

- Derékszögű háromszögnél $a^2+b^2=c^2$
  Hegyes szögű háromszögnél $a^2+b^2>c^2$
  Tompa szögű háromszögnél $a^2+b^2<c^2$
- Az $A(a_1;a_2)$ és $B(b_1;b_2)$ pontok távolsága: $AB=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}$
- Téglatest testátlója: $f=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Tétel: (*Magasságtétel*) A derékszögű háromszög átfogójához tartozó magassága mértani közepe annak a két szakasznak, melyekre az átfogót bontja.($m^2=xy$)

Tétel: (*Befogótétel*) Derékszögű háromszögben az egyik befogó mértani közepe az átfogón lévő merőleges vetületének és az átfogónak. ($a^2=cx$)

Következmények:

- Két szakasz mértani közepe a magasságtétel segítségével szerkeszthető.

Általános háromszögekre vonatkozó tételek:

Tétel: (*Szögfelező tétel*) Bármely háromszögben egy belső szög felezője a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja két részre.

Tétel: (*Szinusztétel*) Bármely háromszögben az oldalak aránya megegyezik a velük szemben fekvő szögek szinuszának arányával.

$$a:b:c=\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma$$

Következmények:

- A háromszög oldalának és a szemben fekvő szög szinuszának hányadosa állandó, egyenlő a köré írt kör átmérőjével:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$$

Tétel: (Koszi*nusztétel*) Bármely háromszögben az egyik oldal négyzetét megkapjuk, ha a másik két oldal négyzetének összegéből kivonjuk a közbezárt szög koszinuszának és ezen két oldal szorzatának kétszeresét.

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$

Négyszögek:

Négyszög	Kerület	Terület
Trapéz: olyan négyszög, amelynek *van párhuzamos oldalpárja.*	$K = a+b+c+d$	$T = \frac{(a+c)m_a}{2}$
Paralelogramma: olyan négyszög, amelynek *szemközti oldalai párhuzamosak.* • *szemközti oldalai egyenlőek;* • *két-két szemközti oldala párhuzamos és egyenlő;* • *átlói felezik egymást;* • *középpontosan szimmetrikus négyszög;*	$K = 2(a+b)$	$T = a \cdot m_a$ $T = a \cdot b \cdot \sin\gamma$ γ az oldalak szöge
Rombusz: olyan négyszög, amelynek *oldalai egyenlő hosszúak.* • *átlói merőlegesen felezik egymást;*	$K = 4a$	$T = a \cdot m_a = \frac{e \cdot f}{2}$
Deltoid: olyan négyszög, amelynek *két-két szomszédos oldala egyenlő hosszú.*	$K = 2(a+b)$	$T = \frac{e \cdot f}{2}$
Téglalap: olyan négyszög, melynek *minden szöge derékszög.* • *átlói egyenlő hosszúak és felezik egymást*;	$K = 2(a+b)$	$T = a \cdot b$
Négyzet: olyan négyszög, melynek *oldalai és szögei egyenlőek.*	$K = 4a$	$T = a^2$
Általános négyszög	$K = a+b+c+d$	$T = \frac{e \cdot f \cdot \sin\gamma}{2}$ γ az átlók szöge

Definíció**: Húrnégyszögnek** nevezzük azokat a négyszögeket, melyek köré kör írható.

Tétel: Egy négyszög akkor és csak akkor húrnégyszög, ha két szemközti szögének összege 180°: $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$

Definíció: **Érintőnégyszögnek** nevezzük azokat a négyszögeket, melyekbe mind a négy oldalukat érintő kör írható.

Tétel: Egy konvex négyszög akkor és csak akkor érintőnégyszög, ha a két-két szemközti oldal hosszának összege egyenlő: a+c=b+d.

Kör:

Tétel: Az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre.

Tétel: Körhöz külső pontból húzott érintő szakaszok egyenlőek.

Definíció: A kör **kerületi szögének** nevezzük mindazokat a konvex szögeket, amelyeknek csúcsa a kör kerületén van és két száruk vagy két húr, vagy egy húr és egy érintő.

Tétel: (*Központi és kerületi szögek tétele*) Egy körben adott ívhez tartozó középponti szög kétszerese az ugyanazon ívhez tartozó kerületi szögnek.

Tétel: (*Kerületi szögek tétele*)Egy körben az ugyanazon ívhez tartozó kerületi szögek egyenlők.

Tétel: A síkon azoknak a pontoknak a halmaza, amelyekből egy adott AB szakasz adott ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$) szögben látszik, két szimmetrikus körív (**látószög** körív). Az adott szakasz a két szimmetrikus körív közös húrja. Ennek végpontjai nem tartoznak a látószögkörívhez.

Tétel: A körhöz a külső pontból húzott **érintőszakasz** mértani közepe annak a két szakasznak, amelyek a külső pontra illeszkedő bármely szelőn a ponttól a körrel alkotott metszéspontokig terjednek. ($PE^2 = PA \cdot PB$)

Tétel: Ha egy körhöz külső pontból tetszőleges **szelőket** húzunk, akkor az egyes szelőkön a P pontból a körrel alkotott metszéspontokig terjedő szakaszok szorzata állandó.

Kör	
kerület	$K = 2r\pi$
terület	$T = r^2\pi$
α szögű körív hossza(*i*)	$i = \frac{2r\pi}{360}\alpha$
α szögű körcikk területe	$T_{körcikk} = \frac{r^2\pi}{360}\alpha$, $T_{körcikk} = \frac{i \cdot r}{2}$

N oldalú konvex sokszög:	
átlóinak száma	$\frac{n \cdot (n-3)}{2}$
belső szögeinek összege	$(n-2)180°$
külső szögeinek összege	360°

Testek	**Felszín (A)**	**Térfogat (V)**
kocka	$6a^2$	a^3
téglatest	$2(ab+ac+bc)$	abc
egyenes hasáb	$2T_{alap} + T_{palást} = 2T_{alap} + M \cdot K_{alap}$	$T_{alap} \cdot M$
egyenes henger	$2T_{alap} + T_{palást} = 2r^2\pi + M \cdot K_{alap} =$ $= 2r^2\pi + M \cdot 2r\pi$	$T_{alap} \cdot M = r^2\pi \cdot M$
gúla	$T_{alap} + T_{palást}$	
szabályos n oldalú gúla	$T_{alap} + T_{palást} = T_{alap} + n \cdot T_{oldal}$	

Vektorok

Műveletek: összeadás, kivonás, számmal szorzás

Definíció: A $\mathbf{v}$ vektor az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok **lineáris kombinációja**, ha található olyan $\alpha, \beta \in R$, melyre $\mathbf{v} = \alpha \cdot \mathbf{a} + \beta \cdot \mathbf{b}$.

Tétel: Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem párhuzamos vektorok, akkor az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vektorok síkjának tetszőleges $\mathbf{v}$ vektora **egyértelműen felbontható** az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokkal párhuzamos összetevőkre.
($\mathbf{v}$ vektor egyértelműen felírható az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok lineáris kombinációjaként)

Bázisvektorok: $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ egymásra merőlegesek, $|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = 1$

Definíció: Az $\mathbf{a}$ vektor koordinátái az $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ bázisrendszerben $(a_1; a_2)$, ha $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$.

Tétel: Ha adottak az A$(a_1; a_2)$, továbbá B$(b_1; b_2)$ pontok, akkor az $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ vektor koordinátái $(b_1 - a_1; b_2 - a_2)$

Definíció: Az $\mathbf{a}$ vektor abszolút értékén az $\mathbf{a}$ hosszát értjük. Jelölés: $|\mathbf{a}|$

Tétel: $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, ahol $\mathbf{a}(a_1; a_2)$.

Következmények:

- $\mathbf{a}$ irányú egységvektor: $\mathbf{a}_e = \dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$
- merőleges vektorok felírása síkban: $\mathbf{a}(a_1; a_2)$-re merőleges pl. $\mathbf{a}'(a_2; -a_1)$ vagy $\mathbf{a}''(-a_2; a_1)$

Definíció: Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok skaláris szorzata $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\gamma$, ahol γ a két vektor által bezárt szög.

Tétel: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2$, ahol $\mathbf{a}(a_1; a_2)$ és $\mathbf{b}(b_1; b_2)$.

Tétel: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}$ merőleges $\mathbf{b}$-re.

Következmények:

- vektorok szögének kiszámítása
- merőleges vektorok felírása: $\mathbf{a}(a_1; a_2)$-re meőleges pl. $\mathbf{a}'(a_2; -a_1)$ vagy $\mathbf{a}''(-a_2; a_1)$

Tétel: Ha egy O pontból az A pontba mutat az $\mathbf{a}$, a B-be a $\mathbf{b}$ vektor, és az F pont az AB szakasz felezőpontja, akkor $\mathbf{f} = \overrightarrow{OF} = \dfrac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}$.

Tétel: Ha egy O pontból az A pontba mutat az $\mathbf{a}$, a B-be a $\mathbf{b}$ vektor, és az AB szakaszt a D pont *AD:DB*=α:β arányban osztja, akkor $\mathbf{d} = \overrightarrow{OD} = \dfrac{\beta\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}}{\alpha + \beta}$.

Tétel: Ha egy O pontból az ABC háromszög csúcsaiba az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok mutatnak, akkor a háromszög S súlypontjába mutató vektor: $\mathbf{s} = \overrightarrow{OS} = \dfrac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3}$