Számelméleti függvények

Definíció : Az f függvényt számelméleti függvénynek nevezzük, ha értelmezési tartománya a természetes számok halmaza.

Definíció: Az $f(n)$ számelméleti függvényt **multiplikatívnak** nevezzük, ha minden $m, n \in \mathbb{N}$, $(m,n) = 1$ számpárra $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$.

Definíció: Az $f(n)$ számelméleti függvényt **totálisan multiplikatívnak** nevezzük, ha minden $m, n \in \mathbb{N}$ számpárra $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$.

- d(n) = n pozitív osztóinak száma
- σ(n) = n pozitív osztóinak összege
- φ(n) = n-hez relatív prímek száma, melyek n-nél nem nagyobbak (Euler-féle függvény)

Tétel: A d(n), σ(n) és φ(n) függvények multiplikatív számelméleti függvények.

Tétel: Ha az n természetes szám prímtényezős felbontása $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}$ akkor

$$d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_r + 1)$$

Biz: A számelmélet alaptétele miatt n osztóiban is csak a $p_1, p_2, \cdots p_r$ prímtényezők szerepelhetnek. p_i kitevője lehet $0,1,2,\ldots \alpha_i$, tehát $\alpha_i + 1$-féle. Mivel a kitevők választása az egyes prímtényezőknél egymástól független, ezért $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_r + 1)$-féleképpen választhatjuk a kitevőket, és ugyancsak a számelmélet alaptétele miatt ilyenkor valóban különböző osztóit kapjuk n-nek. (Ha csupa 0 kitevőt választunk, akkor az 1-es osztót kapjuk, ha a maximális kitevőket, akkor magát az n számot.)

Pl. $d(28) = d(2^2 \cdot 7) = 3 \cdot 2 = 6$ valóban: 1,2,4,7,14,28

$d(5040) = d(2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7) = 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 60$

Tétel: Ha p prím és $n \in \mathbb{N}$ akkor $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha - 1}$

Biz: p^α-nak csak olyan számmal lehet 1-től különböző közös osztója, amely p-vel osztható és természetesen minden ilyen esetben a p közös osztó. Tehát, ha p^α-hoz relatív prímek számát kell meghatározni, akkor minden p-edik számot ki kell venni, tehát $p^\alpha - p^{\alpha - 1}$ darabot kapunk.

Tétel: Ha az n természetes szám prímtényezős felbontása $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}$ akkor

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$$

Biz: A multiplikativítás miatt

$$\varphi(n) = \varphi(p_1^{\alpha_1}) \cdot \varphi(p_2^{\alpha_2}) \cdot \ldots \cdot \varphi(p_r^{\alpha_r}) = \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}\right) \cdot \left(p_2^{\alpha_2} - p_2^{\alpha_2 - 1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(p_r^{\alpha} - p_r^{\alpha_r - 1}\right) =$$

$$= n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$$

Pl. $\varphi(28) = 28 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{7} = 12$ valóban:1,3,5,9,11,13,15,17,19,23,25,27

$$\varphi(5040) = 5040 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} = 1152$$

Tétel: Ha *p* prím és *n*∈ N akkor $\sigma(p^{\alpha}) = \dfrac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1}$

Biz: Az osztók, mind *p* hatványai, melyek mértani sorozatot alkotnak.

$$\sigma(p^{\alpha}) = 1 + p + p^2 + \ldots p^{\alpha} = \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1}$$

Tétel: Ha az n természetes szám prímtényezős felbontása $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}$ akkor

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_r^{\alpha_r+1} - 1}{p_r - 1}$$

Pl. $\sigma(28) = \dfrac{2^3 - 1}{1} \cdot \dfrac{7^2 - 1}{6} = 7 \cdot 8 = 56$ valóban: $1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56$

$$\sigma(5040) = \frac{2^5 - 1}{1} \cdot \frac{3^3 - 1}{2} \cdot \frac{5^2 - 1}{4} \cdot \frac{7^2 - 1}{6} = 31 \cdot 13 \cdot 6 \cdot 8 = 19344$$

Definíció: Az *n* természetes számot tökéletesnek nevezzük, ha egyenlő az önmagánál kisebb pozitív osztóinak összegével. (Ilyenkor $\sigma(n) = 2n$)

Az elnevezés a Pithagoreusoktól származik.A legkisebb tökéletes számok az n=6; 28; 496; 8128. Ezeket már Euklidesz (Kr. e. III. században) is ismerte. Elemek című művében igazolta, hogy:

Tétel: Ha $2^k - 1$ prímszám (Mersenne-prím), akkor $2^{k-1}(2^k - 1)$ tökéletes szám.

Eulertől származik a tétel megfordítása (kb. 2000 évvel később) igazolta, hogy:

Tétel: Ha n páros tökéletes szám, akkor $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$, ahol $2^k - 1$ prím.

Így *n* akkor és csak akkor páros tökéletes szám, ha $n = 2^{p-1} \cdot M_p$, ahol M_p Mersenne-prím. Nem tudjuk, hogy létezik-e végtelen sok Mersenne-féle prím, így azt sem tudjuk, hogy van-e végtelen sok tökéletes szám. Arra a kérdésre sem ismerjük a választ, hogy létezik-e páratlan tökéletes szám.