

# GeoGebra<sup>4</sup>

## Bevezető

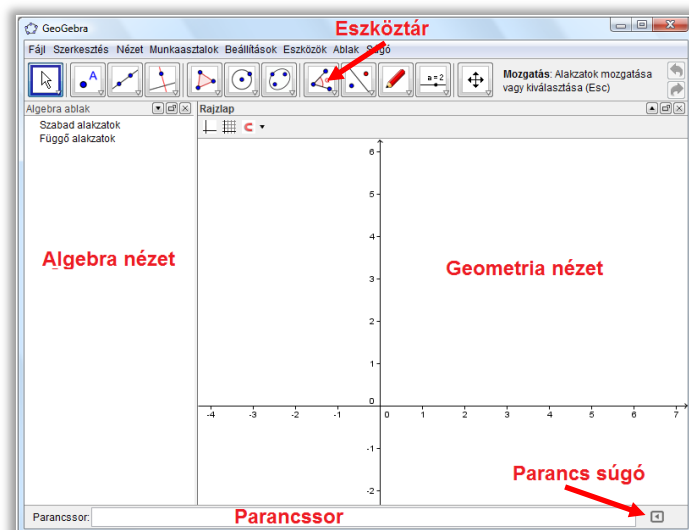
### Mi is az a GeoGebra?

- dinamikus matematikai szoftver könnyen használható csomagolásban
- az oktatás minden szintjén alkalmazható tanításhoz és tanuláshoz egyaránt
- egyesíti az interaktív **geometriát**, **algebrát**, táblázatkészítést, grafikus ábrázolást, differenciál- és integrálszámítást és statisztikát
- nyílt forráskódú szoftver, amely szabadon elérhető a [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org) oldalról

### Tények

- A GeoGebra megkönnyíti a diákok számára a matematikai szerkesztések és modellek készítését, interaktív kísérletezést tesz lehetővé az alakzatok mozgásával, a paraméterek változtatásával.
- A GeoGebra szerzői eszközként is használható, a tanárok interaktív web-oldalakat hozhatnak létre. Tanórai felhasználásra alkalmas anyagok találhatóak és megoszthatók a [www.geogebraTube.org](http://www.geogebraTube.org) oldalon.

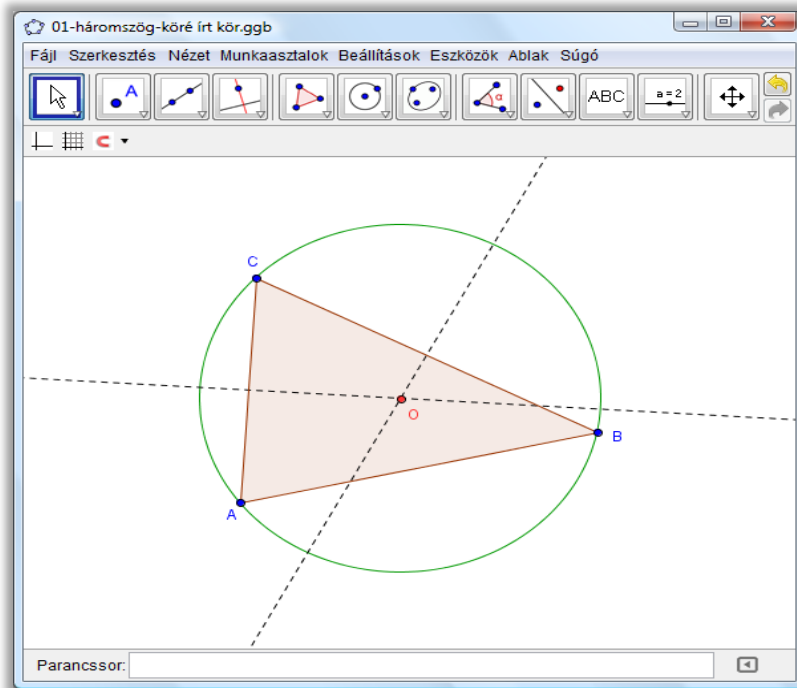
A GeoGebra indításakor a következő ablak jelenik meg:



Az **eszköztárban** található szerkesztő eszközöket kiválasztva az egérrel szerkesztéseket végezhetünk a **geometria ablakban**. Közben az **algebra ablakban** megjelennek a megfelelő koordináták, egyenletek. A **parancssorban** közvetlenül adhatunk meg koordinátákat, egyenleteket, parancsokat, függvényeket, melyek az Enter billentyű leütése után azonnal megjelennek a geometria és az algebra ablakban is. A GeoGebra-ban a geometria és az algebra egységet alkot.

# 1. példa: Háromszög köré írt köre

Feladat: Szerkesszük meg az  $A B C$  háromszög köré írt körét a GeoGebrában!








## Szerkesztés egér használatával


### Előkészületek


- Nyissuk meg a *Munkaasztalok* menüt és válasszuk a *Geometriát*.



### Szerkesztési lépések


1		Válasszuk a „Sokszög” eszközt az eszköztárból. Kattintsunk a geometria ablakban háromszor, ezzel létrehozva az $A$ , $B$ , és $C$ csúcsokat. Fejezzük be a háromszög létrehozását ismét az $A$ pontra kattintva.
2		Következőként válasszuk a „Szakaszfelezőt” (kattintsunk ehhez balról a negyedik ikon sarkában található kis nyílra) és szerkesszük meg a háromszög két oldalának szakaszfelező merőlegesét a háromszög két oldalán kattintva.
3		A „Két alakzat metszéspontja” ikon kiválasztása után a szakaszfelezőkön kattintva, megkapjuk a háromszög köré írt körének középpontját. Nevezzük ezt „ $O$ ”-nak, jobb klikk után (Mac OS: ctrl-click) a helyi menüből az „Átnevezést” kiválasztva.
4		A szerkesztés befejezéséhez válasszuk a „Kör középponttal és kerületi ponttal” eszközt, majd kattintsunk először az $O$ középponton, azután a háromszög valamelyik csúcsán.
5		A „Mozgatás” eszközt kiválasztva, az egérrel elmozdíthatjuk a háromszög csúcsait – a szerkesztés dinamikusan követi a változást.


## Tippek

 Próbáljuk ki az eszköztár jobb szélén található **“Visszavonás”/ “Újra”** gombokat.

-  Egy **alakzat elrejtéséhez** kattintsunk jobb gombbal az alakzaton (Mac OS: ctrl-click) és kapcsoljuk ki az „Alakzat mutatása” beállítást.

 Könnyen megváltoztathatjuk egy **alakzat tulajdonságait** (szín, vonal típusa, ...) a formázó lécs használataival, amely megjeleníthető a rajzlap tetején látható  ikonra kattintva. További beállítások tehetők, ha a „Tulajdonságok..” menüpontot választjuk a legördülő menüből, amely az alakzaton jobb gombbal (Mac OS: ctrl-click) kattintva érhető el.

 A **tengelyek és rács** elrejthető és megjeleníthető a „Nézet” menü segítségével csakúgy, mint az **algebra**, **geometria**, **táblázatkezelő** és **CAS (komputeralgebra)** ablakok.

 A geometria ablakban egy **szerkesztés módosítható** a „Mozgatás” eszköz kiválasztása után az egérrel vonszolva.

A **Szerkesztési lépéseket** (lásd Nézet menü) választva egy táblázatban láthatjuk a szerkesztés valamennyi lépését. A nyilak segítségével újból végigjárhatjuk a szerkesztést. A sorok cseréjével (egérrel húzva) megváltoztathatjuk akár a szerkesztési lépések sorrendjét is.


## Szerkesztés parancssorból

### Előkészületek

- Most ismét végrehajtjuk a fenti szerkesztést a parancssor segítségével. Kezdjük tehát előlről, válasszuk a *Fájl* menüben az *Új* menüpontot.
- A *Munkaasztalok* menüből válasszuk az *Algebra és Grafika* beállítást.

### Szerkesztési lépések

A képernyő felső részén megjelenő parancssorba gépeljük be a következő parancsokat, minden sort Enterrel zárunk.

Parancssor:   

$A = (2, 1)$

$B = (12, 5)$

$C = (8, 11)$

Sokszög[A, B, C]

$F_a = \text{Szakaszelező}[a]$

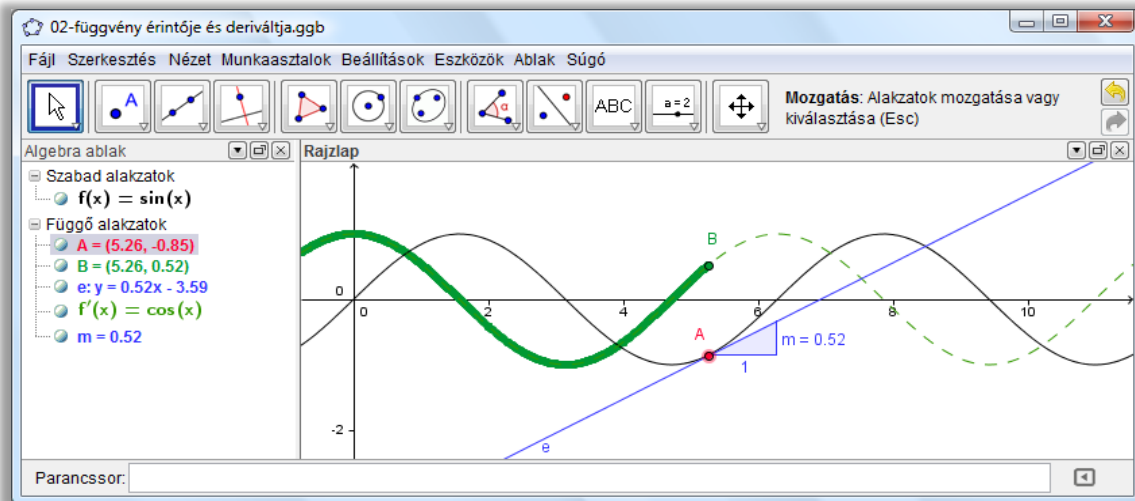
$F_b = \text{Szakaszelező}[b]$

$O = \text{Metszéspon}t[F_a, F_b]$

Kör[O, A]

## 2. példa: Függvény érintője és deriváltja

**Feladat:** Hozzuk létre az  $f(x) = \sin(x)$  függvényt, a függvény deriváltját, egy pontjához tartozó érintőjét, s annak meredekségét mutató háromszöget.








### Első módszer: Pont a függvényen

#### Előkészületek

- Nyisson meg a *Fájl* menüből egy *Új ablakot!*

#### Szerkesztési lépések

1	$f(x) = \sin(x)$	Gépeljük be a parancssorba az $f(x) = \sin(x)$ parancsot, majd üssünk Entert.
2		Az „Új pont” eszköz választása után kattintsunk az $f$ függvény grafikonján. Így létrejön a függvényhez csatolt A pont.
3		Most válasszuk az „Érintők” eszközt, kattintsunk az A ponton majd az $f$ függvényen. Nevezzük át az érintőt „e”-re a jobb klikk (Mac OS: ctrl-click) és „Átnevezés” parancs segítségével.
4	$m = \text{Meredekség [e]}$	Gépeljük be az $m = \text{Meredekség [e]}$ parancsot.
5		A „Mozgatás” eszköz kiválasztása után az egérrel mozgatható az A pont, s közben megfigyelhető az érintő változása.
6	$B = (x(A), m)$	Gépeljük be a $B = (x(A), m)$ parancsot. Itt $x(A)$ az A pont x-koordinátáját jelenti.
		A B ponton jobb gombbal (Mac OS: ctrl-click) kattintva válasszuk a „Nyomvonal” beállítást.
7		A „Mozgatás” bekapcsolásakor, az egérrel vonszolva az A pontot a B pont nyomvonala lesz látható.
8	Derivált [ f ].	Gépeljük be a Derivált [ f ] parancsot.

## Tippek

Gépeljük a parancssorba más függvényutasítást, pl.  $f(x) = x^3 - 2x^2$ . Azonnal megjelenik a deriváltja és az érintője is. Próbáljuk ki az Integrál [ f ] parancsot is.



A „Mozgatást” választva vonszoljuk az egérrel a függvény grafikonját. Figyeljük meg a függvény egyenletének és deriváltjának változását.

**Parancsok automatikus kiegészítése:** az első két betű beírása után automatikusan megjelenik egy javaslat. Ha ez megfelelő, az Enter leütésével elfogadhatjuk, ellenkező esetben egyszerűen folytassuk tovább a beírást.



A **parancs súgó** közvetlenül a parancssor mellett jobb oldalt található. A GeoGebra-ban használható valamennyi parancs listáját tartalmazza.

## Második módszer: Pont $x = a$ - ban

### Előkészületek

- Most az előző szerkesztést ismételjük meg más módon.  
Hozzunk létre egy üres ablakot a *Fájl* menü *Új* parancsával.

### Szerkesztési lépések

Gépeljük be a következő parancsokat a parancssorba. Minden sort Enterrel zárjunk.

$f(x) = \sin(x)$

$a = 2$

$P = (a, f(a))$

$e = \text{Érintő}[a, f]$

$m = \text{Meredekség}[e]$

$B = (x(P), m)$

Derivált [ f ]

## Tippek

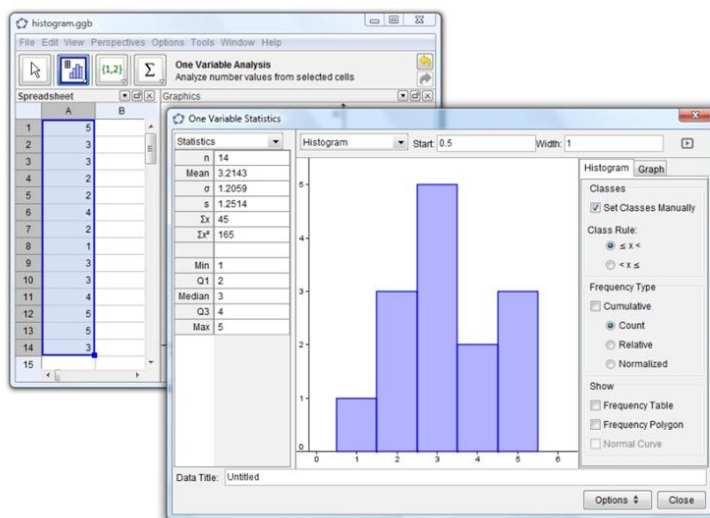


Válasszuk a „Mozgatást”, majd kattintsunk az  $a$  számon. Ekkor  $a$  értéke változtatható a nyíl billentyűkkel, közben a  $P$  pont mozog az  $f$  függvény görbéjén és vele együtt a függvény érintője is.

Az  $a$  értékének megváltoztatásához létrehozhatunk **csúszkát** is: kattintsunk jobb gombbal (Mac OS: ctrl-click) az algebra nézetben  $a$ -ra, majd válasszuk az „Alakzat mutatása” parancsot. A csúszka értéke változik, ha a megjelenő pontot az egérrel arrébb húzzuk a vonalon.

### 3. példa: Adatok elemzése



**Feladat:** Határozzuk meg egy adathalmaz átlagát, mediánját, minimumát és maximumát, továbbá ábrázoljuk az adatokat hisztogrammal!



#### Előkészületek

- Nyissuk meg a *Munkaasztalok* menüt és válasszuk a *Táblázat és Grafikát*.

#### Szerkesztési lépések

1		Írjunk be adatokat a munkalap A oszlopának néhány cellájába, pl. töltsük fel A1-től A14-ig a következő értékekkel 5, 3, 3, 2, 2, 4, 2, 1, 3, 3, 4, 5, 5, 3.
2		Jelöljük ki a szükséges cellákat, majd válasszuk az <i>“Egy változós analízist”</i> . A példában az A1 - A14 cellatartományt jelöltük ki.
3		A megjelenő ablak felső részén állítsuk be megfelelően az <i>„Osztályok”</i> számát. A példában 5 osztályt állítottunk be, mert ötféle különböző érték szerepelt.
4		Megtalálhatjuk az átlagot, minimum és maximum értéket az ablak bal oldalán a <i>“Statisztikai mutatók”</i> között.
5		Kattintsunk az ablak jobb felső sarkában található nyílon, jelöljük be az <i>“Osztályok beállítása manuálisan”</i> négyzetet a <i>“Hisztogram”</i> oldalon. Példánkban a <i>“Kezdő érték”</i> 0.5 és a <i>“Szélesség”</i> 1.

#### Tippek

Változtassunk meg néhány értéket az A oszlopban, s figyeljük meg a hisztogram és a statisztikai adatok mint átlag, medián, maximum és minimum változását.

Változtassuk a diagram típusát *„Hisztogramról”* *„Box Plotra”* (sódrófa-diagram) a hisztogram feletti legördülő menüben.

## További információk

További információkat, anyagokat és segítséget találhat weboldalunkon:

Szoftver

<http://www.geogebra.org>

Kézikönyv és Bemutatók

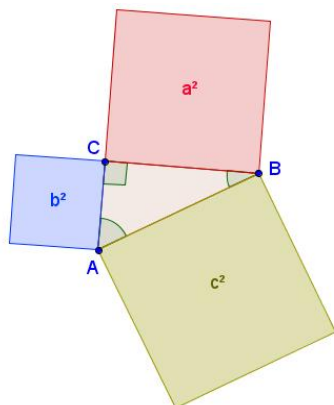
<http://wiki.geogebra.org>

Munkalapok és Tananyagok

<http://www.geogebraTube.org>

Felhasználói fórum

<http://www.geogebra.org/forum>



$$\begin{array}{llll}
 a = 10.36 & a^2 = 107.29 & a^2 + b^2 = & \\
 b = 6.01 & b^2 = 36.15 & 107.29 + 36.15 = & 143.44 \\
 c = 11.98 & c^2 = 143.44 & a^2 + b^2 = & c^2
 \end{array}$$

